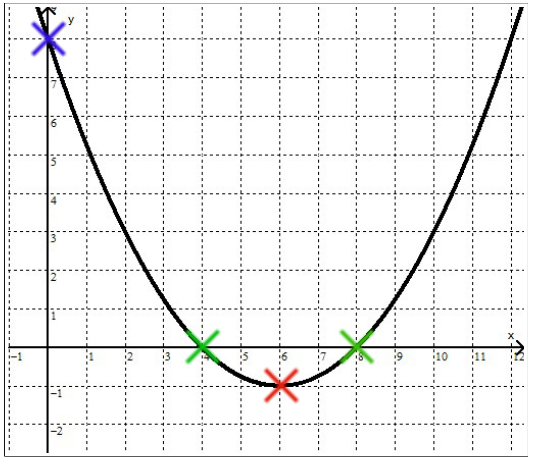
Wichtige Punkte



Y-Achsenabschnitt: Schnittpunkt mit der Y-Achse. Jede Parabel schneidet genau einmal die Y-Achse. In diesem Beispiel: (0|8)

Nullstellen: Schnittpunkte mit der X-Achse. Eine Parabel hat 2, 1 oder 0 Schnittpunkte mit der X-Achse. In diesem Beispiel: (4|0) und (8|0).

Scheitelpunkt: Der höchste oder tiefste Punkt einer Parabel heißt Scheitelpunkt. In diesem Beispiel: (6|-1).

Gleichungsformen, ablesbare Eigenschaften

Normalform: $y=a\,x^2+b\,x+c$ **Scheitelpunktform:** $y=a(x-x_s)+y_s$

Aus den Gleichungen können manche Eigenschaften der Parabel unmittelbar (ohne weitere Berechnung) abgelesen werden.

Streckfaktor und Öffnungsrichtung

Für beide Gleichungsformen gilt:

$a>0$	Positiv, Parabel nach oben geöffnet	$\lvert a\rvert>1$	Parabel steiler, gestreckt
$a=0$	Parabel wird zur Geraden	$\lvert a\rvert=1$	Normalparabel
$a<0$	Negativ, Parabel nach unten geöffnet	$\lvert a\rvert<1$	Parabel flacher, gestaucht

Koordinaten des Scheitelpunktes

Nur aus der Scheitelpunktform ablesbar. Das sind die Werte x_s und y_s

Wichtig: Das Vorzeichen der X-Koordinate ist immer gedreht, das Vorzeichen der Y-Koordinate dagegen nicht!

Beispiele:

Die Parabel $y=2(x-3)^2-4$ hat den Scheitelpunkt (3|-4).

Die Parabel $y=2(x+5)^2+3$ hat den Scheitelpunkt (-5|3).

Y-Achsenabschnitt

Nur aus der Normalform ablesbar. Das ist die absolute Zahl **c**. Aus der Scheitelpunktform ist der y-Achsenabschnitt nicht unmittelbar abzulesen.

Nullstellen berechnen

Die Nullstellen werden berechnet, indem wir für y eine 0 einsetzen und dann x ausrechnen. Tipp: Das geht mit der Normalform einfacher.

Beispiel (entspricht der Zeichnung):

$$\begin{aligned}
y &= 0{,}25x^2-3x+8 && \mid y=0\\
0 &= 0{,}25x^2-3x+8 && \mid :0{,}25\\
0 &= x^2-12x+32 && \mid \text{pq}\\
x_{1;2} &= -\frac{-12}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-12}{2}\right)^2-32}\\
x_{1;2} &= 6\pm\sqrt{36-32}\\
x_{1;2} &= 6\pm\sqrt{4}\\
x_{1;2} &= 6\pm2\\
x_1 &= 8\\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Prüfen, ob ein Punkt auf der Parabel liegt oder nicht

Um zu prüfen, ob ein Punkt auf der Parabel liegt oder nicht, setzen wir seine Koordinaten in die Parabelgleichung ein und finden heraus, ob die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Beispiel (entspricht der Zeichnung):

Punkt (10|3)

$$\begin{aligned}
y &= 0{,}25x^2-3x+8 && \mid x=10, y=3\\
3 &\overset{?}{=} 0{,}25\cdot10^2-3\cdot10+8\\
3 &\overset{?}{=} 0{,}25\cdot100-30+8\\
3 &\overset{?}{=} 25-30+8\\
3 &= 3
\end{aligned}$$

Punkt (10|3) liegt auf der Parabel.

Punkt (5|3)

$$\begin{aligned}
y &= 0{,}25x^2-3x+8 && \mid x=5, y=3\\
3 &\overset{?}{=} 0{,}25\cdot5^2-3\cdot5+8\\
3 &\overset{?}{=} 0{,}25\cdot25-15+8\\
3 &\overset{?}{=} 6{,}25-15+8\\
3 &\neq -0{,}75
\end{aligned}$$

Punkt (5|3) liegt nicht auf der Parabel.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Zeichnung links oben.

Umwandeln: Normalform zu Scheitelpunktform

Beispielgleichung (vergl. umseitige Beispiele):

$$\begin{aligned} y &= 0{,}25x^2-3x+8 && |\text{Eckige Klammer setzen}\\ y &= [0{,}25x^2-3x]+8 && |\text{Faktor vor } x^2 \text{ ausklammern}\\ y &= 0{,}25[x^2-12x]+8 \end{aligned}$$

Nun ergänzen wir in der eckigen Klammer den Term zur binomischen Formel, indem wir die quadratische Ergänzung $\left(\frac{-12}{2}\right)^2=(-6)^2=36$ addieren.

Da wir so den Wert des Terms verfälschen würden, ziehen wir die 36 gleich wieder ab.

$$\begin{aligned} y &= 0{,}25[x^2-12x+36-36]+8 && |\text{Binomische Formel anwenden}\\ y &= 0{,}25[(x-6)^2-36]+8 && |\text{Eckige Klammer auflösen}\\ y &= 0{,}25(x-6)^2-9+8 && |\text{Zusammenfassen}\\ y &= 0{,}25(x-6)^2-1 \end{aligned}$$

Nun können wir die Koordinaten des Scheitelpunktes aus der Gleichung ablesen.

Vorsicht!

Bei der x-Koordinaten wird dabei das Vorzeichen gedreht, bei der y-Koordinaten bleibt das Vorzeichen.

Der Scheitelpunkt liegt in unserem Beispiel also bei: (6|-1). Vergleichen Sie das mit der umseitigen Zeichnung.

Allgemeine Gleichung (Nur für Fortgeschrittene!):

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c && |\text{Eckige Klammer setzen}\\ y &= [ax^2+bx]+c && |\text{Faktor vor } x^2 \text{ ausklammern}\\ y &= a\left[x^2-\frac{b}{a}x\right]+c && |\text{Quadratische Ergänzung}\\ y &= a\left[x^2-\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c && |\text{Binomische Formel anwenden}\\ y &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c && |\text{Eckige Klammer auflösen}\\ y &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c && |\text{Vereinfachen}\\ y &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir Formeln, mit denen wir den Scheitelpunkt auch direkt aus der Normalform berechnen können:[1]

$$x_s=-\frac{b}{2a} \qquad y_s=c-\frac{b^2}{4a}$$

Angewendet auf unser Beispiel:

$$a=0{,}25,\ b=-3,\ c=8$$

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{-3}{2\cdot 0{,}25} \qquad & y_s &= 8-\frac{(-3)^2}{4\cdot 0{,}25}\\ x_s &= 6 & y_s &= 8-\frac{9}{1}\\ & & y_s &= 6 \end{aligned}$$

Umwandeln: Scheitelpunktform zu Normalform

Auch das zeigen wir an unserer Beispielgleichung:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}25(x-6)^2-1 && |\text{Binomische Formel anwenden}\\ y &= 0{,}25(x^2-12x+36)-1 && |\text{Klammer auflösen, Distributivgesetz}\\ y &= 0{,}25x^2-3x+9-1 && |\text{Vereinfachen}\\ y &= 0{,}25x^2-3x+8 \end{aligned}$$

Parabeln in Natur und Technik

Die Flugbahnen von Bällen, Geschossen etc. folgen Parabelbögen (Wurfparabel).

Die Stützkonstruktion von Brücken, Dächern etc. ist oft parabelförmig.

Zerschneiden wir einen Hohlspiegel in zwei gleichgroße Teile, ist die Schnittlinie oft eine Parabel (Parabolspiegel).

1 Leider stehen diese Formeln in der Regel nicht in der Formelsammlung, die in der Prüfung ausgegeben wird. Sie müssten sie also sicher auswendig können – eher etwas für Fortgeschrittene.